MATHÉMATIQUES ET ALGORITHMIQUE SP TA

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

On pourra admettre les résultats de certaines questions pour démontrer les suivantes.

PARTIE I

I.1) Montrer que l'ensemble F des applications dérivables f de $]0,+\infty[$ dans IR vérifiant :

(I) $\forall\ x \in\ ]0,+\infty[\ ,\ f'(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$

est un IR-espace vectoriel, pour les opérations usuelles.

I.2) Montrer que l'ensemble G des applications dérivables g de IR dans IR vérifiant :

(II) $\forall\ t \in \mathbb{R},\ g'(t) = e^t\, g(t/2)$

est un IR-espace vectoriel, pour les opérations usuelles.

I.3) Soit ψ l'application de F dans G qui, à toute application f de F, associe l'application g de G définie par:

(III) $\forall\ t \in \mathbb{R},\ g(t) = f\left(e^t\right)$.

Démontrer que ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

PARTIE II

On définit une suite d'applications $(\phi_n)\ n \in \mathbb{N}$ de $[0,+\infty[$ dans IR par :

$$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \phi_0(x)=1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \phi_n(x)=1+\int_0^x \phi_{n-1}\left(\sqrt{u}\right)du \ .$$

II.1) On pose :

$$r_0=0 \ \text{ et } \ \forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ r_k = 2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\ ,\ c_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall\ k \in \mathbb{N}^*\ ,\ c_k = \left(\prod_{i=1}^{i=k} r_i\right)^{-1} \ .$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} c_k\ x^{r_k}.$$

II.2) Prouver que $\forall\ A > 0$, la série d'applications

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k\ x^{r_k}$$

est normalement convergente sur [0,A], et la suite d'applications $(\phi_n)\ n \in \mathbb{N}$ uniformément convergente sur [0,A]. On notera $\phi = \lim \phi_n$, ϕ étant définie sur $[0,+\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

II.3) Montrer que :

$$\forall\ x \in [0,+\infty[,\quad \phi(x) = 1 + \int_0^x \phi\left(\sqrt{u}\right) du$$

et que la restriction de ϕ à $]0,+\infty[$ est un élément de F.

II.4) Montrer que l'application f_0 définie par:

$$\forall\ x \in]0,+\infty[,\quad f_0(x) = \phi(x)/\phi(1)$$

est une application de F vérifiant $f_0(1) = 1$.

PARTIE III

On se propose d'étudier l'application $g_0 = \psi(f_0)$. On rappelle que g_0 vérifie la relation (II), avec $g_0(0) = 1$ et $g_0(t) = f_0(e^t)$.

III.1) Démontrer que

$$\forall\ t \in \mathbb{R},\quad g_0(t) = 1 + \int_0^t e^u\, g_0(u/2)\, du.$$

III.2.a) Montrer qu'il existe un réel α strictement positif tel que g_0 soit strictement positive sur $[0, \alpha]$.

III.2.b) Prouver que g_0 est strictement positive sur $[0,2\alpha]$.

III.2.c) En déduire que g_0 est strictement positive sur $[0,+\infty[$.

III.3 a) Montrer qu'il existe un réel β strictement négatif tel que:

$$\forall\ t \in [\beta,0[\ ,\quad 0 < g_0(t) < 1\ .$$

III.3.b) Prouver que :

$$\forall\ t \in [2\beta,0[\ ,\quad 0 < g_0(t) < 1\ .$$

III.3.c) En déduire que :

$$\forall\ t \in]-\infty,0[\ ,\quad 0 < g_0(t) < 1.$$

III.4.a) Étudier le signe de g'_0 sur IR. Justifier l'existence de g''_0 et étudier son signe.

III.4.b) Trouver :

$$\lim_{t\to+\infty} g_0(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{g_0(t)}{t}.$$

III.5) Justifier l'existence de $\lim_{t\to-\infty} g_0(t)$, et exprimer cette limite avec $\phi(1)$.

PARTIE IV

On se propose d'étudier l'application f_0. On rappelle que f_0 vérifie la relation (I) avec $f_0(1) = 1$, et que $f_0 = \psi^{-1}(g_0)$.

IV.1) Étudier les signes de f_0 et f'_0. Justifier l'existence de f''_0 et donner son signe.

IV.2) Prouver que $\lim_{x\to 0,\ x>0} f_0(x)$ existe ; on notera L cette limite.

Montrer que $L > 0$. On prolongera f_0 sur $[0,+\infty[$ par $f_0(0) = L$.

IV.3) On pose $h(x) = f_0(x) - x$; étudier les signes de h' et de h pour $x > 0$.

IV.4.a) On pose :

$$k(x) = \frac{3}{2} f_0(x) - x^{3/2} - \frac{1}{2} \quad .$$

Étudier le signe de $k'(x)$ pour $x > 0$.

IV.4.b) En déduire un majorant de $f_0(0) = L$.

IV.4.c) Calculer, à l'aide de ϕ, une valeur approchée de $f_0(0)$ à 10^{-2} près.

IV.4.d) Trouver :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_0(x)}{x}$$

IV.5.a) On pose :

$$m(x) = f_0(x)/x^2 \quad \text{pour} \quad x > 0 .$$

Démontrer que le signe de $m'(x^2)$ est celui de :

$$n(x) = \frac{1}{2} x^2 f_0(x) - f_0\left(x^2\right) \quad .$$

IV.5.b) Trouver une relation entre $n'(x)$ et $n\left(\sqrt{x}\right)$.

IV.5.c) En déduire que m est décroissante.

IV.5.d) Étudier le signe de : $f_0(x) - x^2$.

IV.5.e) Étudier le signe de :

$$f_0(x) - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \quad .$$

IV.6) Représenter graphiquement les applications définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$x \mapsto \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2} \quad , \quad x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)^2 \quad , \quad \text{et} \quad x \mapsto f_0(x) .$$

On limitera le tracé à $x \in [0,2]$, avec une unité de 10 cm.

IV.7) Donner les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 1, avec $x > 1$, des applications

$$f_0 \quad , \quad f_1 : x \mapsto \frac{x^2-1}{2\ln x} \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{1+\ln x} \quad .$$

En déduire qu'il existe $\gamma > 1$ tel que :

$$\forall\, x \in\ ]1, \gamma] \quad , \quad f_1(x) < f_0(x) < f_2(x) \quad .$$

IV.8) Démontrer que :

$$\forall\, x > 1 \quad , \quad f'_1(x) < f_1\left(\sqrt{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f'_2(x) > f_2\left(\sqrt{x}\right) \quad .$$

IV.9) On pose :

$$X = \sup\left\{\gamma \in\ ]1 \quad , \quad +\infty[\ / \ \forall\, x \in]1,\gamma[\quad , \quad f_1(x) < f_0(x) < f_2(x)\right\}$$

Montrer que $X = +\infty$; quelle conclusion en déduit-on ?

Tournez la page S.V.P.

PARTIE V

V.1) Supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n$ de rayon de convergence infini, avec $a_0 = 1$, dont la somme est élément de G. En utilisant la relation (II) et le développement en série entière de e^t, établir une relation donnant a_n en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

V.2) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ |a_n| \leq \frac{2^n}{n!} \ .$$

V.3) En déduire l'existence et l'unicité d'une application de G développable en série entière sur IR, et prenant la valeur 1 en t = 0.

V.4) On démontre maintenant qu'il n'existe pas d'application g de G vérifiant g(0) = 1 et non développable en série entière sur IR. Soit donc $g \in G$.

V.4.a) Prouver que g est indéfiniment dérivable.

V.4.b) Grâce à la formule de Leibniz, exprimer $g^{(n)}(t)$, pour $n \geq 1$, en fonction des $g^{(i)}(t/2)$, pour $i \leq n-1$.

V.4.c) Soit :
$A \geq 1$, et $M = \max_{t \in [-A, A]} |g(t)|$; montrer que $\forall t \in [-A, +A]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|g^{(n)}(t)\right| \leq M e^{nA}$

V.4.d) En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

V.5) Quelle est la dimension des espaces vectoriels F et G ? Donner, en fonction de f_0 ou de g_0, toutes les applications de F et de G.

PARTIE VI

Rédiger un programme en langage **PASCAL** permettant d'atteindre les objectifs suivants :

1) Calculer des valeurs approchées de $f_0(x)$ pour :
$x \in \mathcal{A} = \{0 ; 0,1 ; 0,2 ; \ldots ; 1,9 ; 2\}$. Pour cela, on utilisera la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \ x^{r_k}$$

et les fonctions ϕ_n de la partie II. Pour chaque valeur de $x \in \mathcal{A}$ un test devra permettre de déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que :
$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq 10^{-4}$, le réel 10^{-4} étant déclaré dans le programme comme une constante. On prendra alors $\phi_n(x)$ pour valeur approchée de $\phi(x)$.

2) Afficher à l'écran les résultats, c'est-à-dire afficher :
$f_0(0) = \ldots$, $f_0(0,1) = \ldots$, $\ldots$, $f_0(1,9) = \ldots$, $f_0(2) = \ldots$, avec au maximum 3 chiffres après la virgule.

Ce programme devra être accompagné de brefs commentaires précisant les algorithmes utilisés et la signification des variables.

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'après documents fournis.